PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 4p

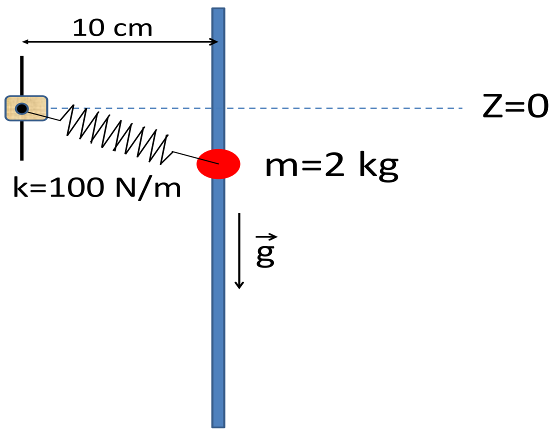
Una bola parcialmente hueca de 2 kg se encuentra en un tubo vertical que pasa por su eje enganchada a un muelle de longitud natural $l_o = 10$ cm y constante elástica $k = 100$ N/m tal y como indica la figura. Supón que la fricción del objeto con el tubo, que se opone al movimiento de éste siempre que la velocidad de la bola sea diferente de cero, es proporcional a la fuerza normal al desplazamiento N que realiza el tubo sobre la bola en cada instante. Considera que la constante de proporcionalidad entre la fricción F_{fr} y la normal N, o coeficiente de fricción dinámico, μ_d ($|F_{fr}| = \mu_d|N|$) depende mucho del tipo de material del tubo. Contesta a las siguientes preguntas considerando que el módulo de la gravedad vale $g = 10$ m/s^2:

a) Si el material del tubo es tal que $\mu_d = 0$, justifica a partir de un diagrama de fuerzas que el único punto z_{eq} donde podemos colocar la bola inicialmente quieta y conseguir que permanezca ahí es $z_{eq} = -29.5$ cm. Eso significa que la bola, tal y como está posicionada en la figura, no puede estar quieta.

b) Si suponemos que se conserva la energía mecánica y que inicialmente la bola se halla en reposo en $z_o = 0$, calcula qué velocidad tiene la bola cuando pasa por primera vez por z_{eq}. Indica si pasará una sola vez o varias veces y qué velocidad llevará cada vez si este es el caso.

c) Obtén la expresión de la fuerza normal al desplazamiento N que hace la barra sobre la bola en un instante cualquiera del movimiento anterior. Da el resultado en términos de la coordenada z en la que se halla la bola.

d) Calcula la velocidad al pasar por primera vez por z_{eq} si analizamos el mismo movimiento indicado en el apartado b, pero en vez de una barra donde $\mu_d = 0$ tenemos una barra donde $\mu_d = 0.4$. Te puede ser útil darte cuenta que si $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ entonces $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$



PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 6p

La idea de este problema es calcular el campo electrostático, y la diferencia de potencial entre dos puntos, que genera un hilo de longitud L y carga total Q_T uniformemente distribuida a lo largo del hilo. Para resolverlo hasta el final, te puede ser útil recordar que $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$; $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

a) Considera primero tres cargas puntuales idénticas δq situadas una en el origen de coordenadas, otra en la posición $(0, a, 0)$ y otra en la posición $(0, -a, 0)$. Calcula el vector campo eléctrico en el eje X, $\vec{E}(x, y = 0, z = 0)$.

b) Añade ahora dos cargas δq más, una por encima y otra por debajo del sistema de cargas anterior a una distancia a. Es decir, coloca una nueva carga en $(0, 2a, 0)$ y otra en $(0, -2a, 0)$. Calcula de nuevo $\vec{E}(x, y = 0, z = 0)$

c) Repite el paso anterior hasta colocar $2n+1$ cargas en $-na, (-n+1)a, (-n+2)a, ..-a, 0, a, ..., (n-1)a, na$. Obten el nuevo campo $\vec{E}(x, y = 0, z = 0)$ expresándolo como un sumatorio desde $j = -n$ hasta $j = +n$.

d) Utilizando la siguiente definición $\tan(\theta_j) = \dfrac{ja}{x}$, demuestra que el campo eléctrico en la dirección x se puede escribir como:

$$E_x(x, y = 0, z = 0) = \frac{k\ x\ \delta q}{|x|^3} \sum_{j=-n}^{j=n} \cos^3(\theta_j) \qquad (1)$$

donde k es la constante de Coulomb.

e) Considera ahora el limite en que n tiende infinito, a va hacia cero y δq va hacia cero pero de tal manera que $na = L/2$ y $\delta q/a = \lambda$. En este limite el sistema de cargas se convierte en un hilo de longitud L que va desde $-L/2$ hasta $L/2$ con una carga total $Q_T = \lambda L$. Calcula el valor del campo eléctrico en el eje X, $\vec{E}(x, y = 0, z = 0)$, en este caso como una expresión cerrada en la que no aparezca el sumatorio. Te puede ser útil darte cuenta que en este límite se cumple $\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{a}{x}\cos^2(\theta_j)$ para poder reescribir el sumatorio anterior de tal manera que puedas calcular el límite del sumatorio usando el teorema fundamental del cálculo.

f) La diferencia de potencial entre dos puntos del eje X se puede calcular haciendo la integral de la componente del campo en dicha dirección, es decir $V(x_b) - V(x_a) = -\int_{x_a}^{x_b} \vec{E}(x, 0, 0) \cdot \vec{\imath}\, dx$. Tomando el potencial a cero en el infinito calcula el potencial $V(x)$ para cualquier punto del eje x. Si no eres capaz de calcularlo para cualquier punto, intenta encontrar la diferencia de potencial entre dos puntos muy cercanos al hilo $x_a << L, x_b << L$. En cualquier caso, sin necesidad de hacer ningún cálculo, ¿Tiene el potencial $V(x)$ la misma forma (kQ_t/x) que te han enseñado los libros de bachillerato, para el caso de una carga puntual, cuando $x << L$? ¿Y cuando $x >> L$?

PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 5p

Considera una caja cúbica de medio kilogramo con coeficiente de fricción dinámico con el suelo $\mu_{tc} = 0.2$ y un volumen de $80 \times 80 \times 80$ cm^3 que se encuentra sometida a la fuerza del viento y que aguantas para que inicialmente no se mueva. Tomas unos ejes de coordenadas tales que el eje Z es perpendicular al suelo y paralelo a la gravedad. Aguantas la caja de tal manera que su centro de masas, que es también su centro geométrico, se encuentra inicialmente en la posición $\vec{r}_c = (0, 0, 40)$ cm con dos de los cuatro lados de la cara que toca el suelo en las posiciones $\vec{C}_1 = (\sqrt{2}\ 40, 0, 0)$ cm y $\vec{C}_2 = (0, \sqrt{2}\ 40, 0)$ cm. En un instante determinado $t = 0$, en lugar de compensar la fuerza del viento, decides hacer una fuerza constante $\vec{F} = (4, 3, 0)$ N y ves que la caja se mueve en un movimiento rectilíneo. Resuelve las siguientes cuestiones sabiendo que el centro de masas se acelera como si todas las fuerzas que actúan sobre la caja estuvieran aplicadas en el mismo centro. Toma $g = 10$ m/s^2.

Nota: Recuerda que, dado μ_{tc}, la fuerza de fricción con el suelo, si la caja se mueve, vale $\vec{F}_f = -\mu_{tc} N \hat{u}$ donde $\hat{u}$ es el vector unitario de la recta del movimiento y N el módulo de la normal.

a) Haz un dibujo de cómo se encuentra la caja inicialmente respecto a los ejes de referencia y haz un esquema de las fuerzas sobre ella a partir de $t = 0$ s considerando que la normal compensa el peso.

b) Calcula cuánto vale la fuerza que hace el viento sobre la caja si la trayectoria $\vec{r}_c(t)$ que hace el centro de la caja es un movimiento en la dirección X y vale $\vec{r}_c(t) = (3t^2, 0, 0.4)$ m.

c) Si hubiéramos conseguido eliminar la fuerza del viento protegiendo la caja y hubiéramos hecho la misma fuerza exterior $\vec{F} = (4, 3, 0)$ N, qué movimiento rectilíneo seguiría la caja? Es decir, cuál sería la trayectoria de su centro $\vec{r}_c(t)$?

d) Imagina que además de eliminar la fuerza del viento, colocamos inicialmente una piedra diminuta de 100 gramos en la parte superior de la caja en la esquina que se encuentra en las coordenadas $\vec{C}_3 = (\sqrt{2}\ 40, 0, 80)$ cm. Calcula cuál es el coeficiente de fricción estático mínimo μ_{min} necesario entre la caja y la piedra para que la piedra no tenga movimiento relativo con respecto a la caja cuando aplicamos $\vec{F} = (4, 3, 0)$ N sobre la caja. Cuál sería la trayectoria de la piedra en este caso?

Colocamos ahora la caja en su posición inicial con la piedra en el mismo lugar indicado en el apartado anterior y aislados del viento pero no de la lluvia que cae sobre ellos durante unos instantes. La breve lluvia hace que la fricción entre tierra y caja no quede afectada pero en cambio los coeficientes de fricción estático y dinámico entre caja y piedra caen hasta valer 0.3 y 0.25 respectivamente. En estas condiciones aplicamos la fuerza $\vec{F} = (4, 3, 0)$ N sobre la caja que avanza en linea recta.

e) Comprueba si la aceleración de la piedra y la caja son o no son iguales. Obtén las aceleraciones de los dos cuerpos.

PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 5p

La idea de este problema es entender que una distribución de cargas puntuales de suma cero genera un campo eléctrico que no decae como la ley de Coulomb $1/d^2$ y que además se puede entender a partir del concepto de vector dipolar eléctrico $\vec{p}$. Para hacerlo trataremos un problema en dos dimensiones que es fácilmente generalizable a tres dimensiones. Considera tres cargas puntuales, colocadas una en el origen de coordenadas $\vec{r}_1 = (0,0)$, otra en $\vec{r}_2 = (b,0)$ y otra en $\vec{r}_3 = (0,b)$. La carga del origen es -2q, y cada una de las otras dos vale +q. La suma total es, por lo tanto, cero. Toma $K = 9 \cdot 10^9$ SI.

a) Calcula el campo eléctrico en el eje X, $\vec{E}(x, y = 0)$ y su módulo en términos de b, q y x.

b) Calcula el campo eléctrico en la recta $y = x$, $\vec{E}(x = a, y = a)$ y su módulo en términos de b, q y a.

c) Demuestra que cuando $b/a = \epsilon << 1$ con $a > 0, b > 0$, el módulo del campo eléctrico en el apartado anterior se puede escribir como $|\vec{E}| = C(q,b)/a^\beta$ donde $C = K\sqrt{8}qb$ y $\beta > 2$ usando que si $\epsilon << 1$ entonces $\sqrt{1-\epsilon} \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}$. Encuentra cuánto vale β.

d) Obten una expresión similar para el módulo del campo eléctrico $|\vec{E}| = D(q,b)/x^\beta$ en el eje X cuando $x >> b$.

e) El campo eléctrico en cualquier punto del plano $\vec{R} = (x, y)$ generado por cargas que suman cero, si $d = |\vec{R}|$ se encuentra muy lejos de las cargas, se puede escribir en términos del vector unitario $\hat{r}$ que apunta desde el origen de coordenadas hasta el punto $\vec{R}$ y del vector dipolar eléctrico $\vec{p}$ según la ecuación:

$$\vec{E} = \frac{K}{d^\beta}[3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}]. \tag{1}$$

Esta solución general debe coincidir con lo obtenido en los casos anteriores donde en el apartado c) tenemos $a = |\vec{R}| >> b$ y en el d) $x = |\vec{R}| >> b$. Deduce cuánto vale este vector dipolar $\vec{p}$ que te define el campo alejado de las cargas para este problema. Discute como lo podrías definir de forma general para cualquier otra distribución de cargas de suma cero.

PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 5p

Considera la caja de masa M colocada encima de la mesa tal como se indica en la figura. La caja está enganchada a un muelle de constante recuperadora k y a una cuerda inextensible que la conecta via una polea ideal a otra masa m que se mueve en la dirección vertical. Resuelve las siguiente cuestiones tomando el movimiento de M en la dirección X con un origen de coordenadas ($x = 0$) situado en el punto en que la caja no recibe ninguna fuerza del muelle. Considera inicialmente que la fricción es despreciable.

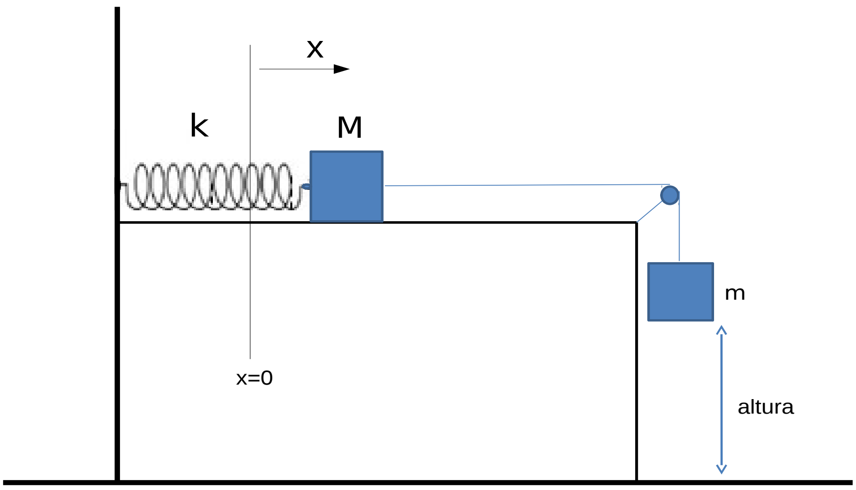
a) Haz el diagrama de fuerzas de M y de m. Comenta por qué la caja se moverá si inicialmente se halla en $x = 0$. Halla en qué posición x deberias colocar la caja inicialmente para que no se mueva.

b) Halla la aceleración a de la caja M únicamente en términos k, m, M, g y de su posición x.

c) Suponiendo que la caja se halla inicialmente en $x = 0$, calcula a qué altura h debe situarse m para que esta llegue con velocidad nula al suelo. Escribe la solución en términos de k, m, M y g.

d) Para el caso anterior, calcula el tiempo que pasa entre que la caja M se halla en $x = 0$ y la llegada al suelo de m en términos de los parámetros del problema.

e) Suponiendo que la fricción estática no puede impedir el movimiento inicial pero que ahora hay una fricción dinámica μ_d entre la masa M y la superficie de la mesa no despreciable, vuelve a calcular los apartados c y d. Escribe ahora la solución en términos de μ_d, k, m, M y g



PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE FÍSICA

PROBLEMA: 5p

Considera primero un cable de cobre muy largo por el que pasa una intensidad de 10 Amperios situado a lo largo del eje X. Considera un segundo cable muy largo por el que pasan 5 Amperios que apunta en la dirección Z y que corta el plano XY ($Z = 0$) en el punto $\vec{r}_h = (1, 5, 0)$ cm. Toma la permeabilidad magnética del entorno del cable como $\mu = 2 \cdot 10^{-6}$T m/A

a) Haz un esquema/dibujo de la posición de los cables considerando primero que el papel es el plano XY (Z=0) y luego que es el plano YZ (X=0).

b) Calcula cuánto valdrá el campo magnético $\vec{B}_1$ realizado por el primer cable en el punto $\vec{r}_A = (1, 1, 0)$ cm. Indica el campo magnético como una magnitud vectorial.

c) Calcula ahora cuánto valdrá el campo magnético $\vec{B}_2$ realizado por el segundo cable en el punto $\vec{r}_A$. Obtén el campo magnético total $\vec{B}_T$ en $\vec{r}_A$ tanto en magnitud vectorial como en módulo.

d) Obten una expresión para el campo magnético total a lo largo del eje Y como magnitud vectorial, es decir, encuentra $\vec{B}_T(x = 0, y, z = 0)$ en función únicamente de la posición y.

e) Considera ahora un pequeño circuito de cobre de forma circular (una espira de cobre) en el plano

XY ($Z = 0$) de superficie 1 cm^2 y cuyo centro se encuentra inicialmente en la posición $\vec{r}_c = (0, 1, 0)$ cm. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo si la empezamos a mover a 20 cm/s en la dirección y positiva. Haz la suposición de que el campo magnético en cualquier punto de la superficie de la espira es aproximadamente igual al campo magnético en su centro.